УДК 51-73

НЕРАВНОВЕСНАЯ ТЕРМОДИНАМИКА РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Ю.П. Вирченко, М.А. Сапрыкин

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. В рамках представления о флуктуационном электромагнитном поле построена стохастическая модель, описывающая неравновесную термодинамику радиационно-кондуктивного теплообмена в парамагнитных диэлектрических средах. В её основе лежит стохастическое поле пространственно распределённых термодинамических флуктуаций спонтанной электрической поляризации, динамика которой подчинена флуктуационно-диссипационной теореме.

Ключевые слова: тепловые флуктуации, электрическая поляризация, радиационно-кондуктивный теплоообмен, гауссовское поле.

1. Введение. Конкретные расчёты переноса тепла в полупрозрачных твердотельных средах, учитывающие механизм радиационно-кондуктивного теплообмена, в настоящее время, базируются на т.н. теории переноса излучения. Эта теория основана на представлениях геометрической оптики в сочетании с законом Кирхгофа, который регулирует поглощение и переизлучение света в среде в красной и инфракрасной областях спектра, ответственных за перенос тепла [1].

В то же время, последовательная микроскопическая теория радиационно-кондуктивного теплообмена в настоящее время отсутствует. Это связано с глубокой причиной – механизмы перекачки электромагнитного излучения в тепловые фононы в твёрдом теле и обратного процесса излучения фононами электромагнитных волн проявляются эффективно только в результате учёта сильной связи между молекулами (ионами) среды.

Между тем, мыслимы физические ситуации, когда, с одной стороны, становятся существенными отклонения от геометрической оптики (например, теплообмен в сильно разогретых образцах с большими линейными размерами и с большой оптической прозрачностью) и, когда, с другой стороны, среда микроскопически сложно устроена настолько, что рассмотрение процессов поглощения и излучения электромагнитных волн, переносящих тепло, на основе только закона Кирхгофа становится неадекватным. По этой причине, оказывается важным такое дальнейшее развитие теории радиационно-кондуктивного теплообмена, при котором в теорию уже будет явно введено электромагнитное поле, подчиняющееся уравнениям Максвелла в среде. В рамках такой теории уже возникает возможность решить две указанные выше теоретические проблемы.

Основы теории такого рода были заложены в работах Рытова [2],[3]. Она базировалась на представлении о тепловых флуктуациях электромагнитного поля в среде, вызванных тепловыми колебаниями пространственной структуры самой среды, которые, таким образом, являются, в рамках этой теории, источником электромагнитного излучения – переносчика тепла.

Тем не менее, оказалось, что для явного вычисления основной величины теории радиационно-кондуктивного теплообмена – плотности $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ потока энергии теплового электромагнитного поля в пространственной точке с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$ в виде функционала $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{S}[T(\boldsymbol{r},t)]$ от текущего распределения температуры $T(\boldsymbol{r},t)$ в среде в тот же самый момент времени t требуются дальнейшее уточнение изучаемой физической ситуации, то есть дополнительные сведения о физической природе среды. Именно на основе функционала $\boldsymbol{S}[T(\boldsymbol{r},t)]$ составляется замкнутое эволюционное уравнение, описывающее перенос тепла в среде,

$$c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = (\nabla, \varkappa(T)\nabla T) - (\nabla, \boldsymbol{S})\,, \tag{1}$$

где $c(T)$ – удельная теплоёмкость среды и $\varkappa(T)$ – её коэффициент теплопроводности. В частности, вычисления такого рода были осуществлены авторами [4], [5] в случае, когда среда является диэлектриком или высокоомным полупроводником с ковалентной химической связью. В этом случае на микроуровне отсутствуют (сильно подавлены) флуктуации электрического заряда и флуктуации электрического тока, которыми оперирует теория Рытова [2], [3], Кроме того, равенство нулю спина молекул среды позволяет предположить также и сильную подавленность микрофлуктуаций плотности магнитного момента в среде. В работах [4], [5] также предполагалось, что среда изотропна с электродинамической точки зрения и в ней пренебрежимо мало влияние пространственной дисперсии на распространение электромагнитных волн. Развитая в этих работах теория оказалась в полном соответствии с теорией переноса излучения в том физическом случае, когда применимо приближение геометрической оптики. Однако, вычисления в указанных работах были в сильной степени ориентированы именно на выяснение области применимости классической теории переноса излучения. За кадром осталась общая формулировка теоретического подхода для описания радиационно-кондуктивного теплообмена на основе основных положений теории флуктуаций.

2. Гауссовское поле электрической поляризации. Будем рассматривать флуктуационное электромагнитное поле $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ в среде того же типа, что и изучавшаяся в работах [4], [5]. Поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ подчиняются системе уравнений Максвелла

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -[\nabla, \boldsymbol{E}]\,, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = [\nabla, \boldsymbol{H}]\,, \tag{2}$$

$$(\nabla, \boldsymbol{B}) = 0\,, \quad (\nabla, \boldsymbol{D}) = 0\,, \tag{3}$$

где, согласно сказанному выше о природе среды, мы полагаем, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ с постоянной магнитной проницаемостью μ и $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + 4\pi\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)$ – вектор электрической поляризации в пространственной точке с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$. Материальное уравнение для вектора $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)$ мы принимаем, в рамках линейной электродинамики, в виде

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}(t-t')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t')dt' + \tilde{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{r},t)\,, \tag{4}$$

где $\hat{\chi}(t)$ – мгновенная динамическая электрическая восприимчивость среды такая, что $\hat{\chi}(t) = 0$ при $t < 0$. Формула (4) описывает линейную реакцию среды на возмущение электрическим полем, в которой мы учли пренебрежимую малость пространственной дисперсии, изотропность среды и отсутствие в ней магнитоэлектрического эффекта. Функция $\tilde{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{r},t)$ описывает собственную (спонтанную) электрическую поляризацию среды. Тот факт, что мы ограничились только линейной частью реакции среды связан с тем, что электрическое поле $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$, имеющее тепловое происхождение, мало. Собственная электрическая поляризация, в нашем случае, описывает тепловые случайные флуктуации этой физической характеристики, которые имеют место в отсутствие внешнего возмущения. Именно эти флуктуации служат источником теплового электромагнитного излучения в уравнениях (1),(2). Стохастический характер функции $\tilde{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{r},t)$ связан не только с тем, то она является характеристикой системы большого числа частиц – молекул среды, расположенных вблизи точки с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, но и с квантовым характером излучения и поглощения тепловых фотонов.

Вводя динамическую проницаемость среды

$$\hat{\varepsilon}(t) = \delta(t) + 4\pi\hat{\chi}(t)$$

так, что $\hat{\varepsilon}(t) = 0$ при $t < 0$, запишем, на основании (2),(3) полную систему уравнений, описывающую флуктуационное электромагнитное поле

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -[\nabla, \boldsymbol{E}]\,, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\varepsilon}(t-t')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t')dt' + \frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{j}} = [\nabla, \boldsymbol{H}]\,, \tag{5}$$

$$(\nabla, \boldsymbol{H}) = 0\,, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\varepsilon}(t-t')(\nabla, \boldsymbol{E})(\boldsymbol{r},t')dt' = 4\pi\tilde{\rho}\,, \tag{6}$$

где введены эффективные флуктуационные плотность тока $\tilde{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r},t) = \dot{\tilde{\boldsymbol{P}}}(\boldsymbol{r},t)$ и плотность заряда $\tilde{\rho}(\boldsymbol{r},t) = -(\nabla, \tilde{\boldsymbol{P}})(\boldsymbol{r},t)$, которые, согласно определению, удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} + (\nabla, \tilde{\boldsymbol{j}}) = 0\,.$$

Здесь проявляется отличие развиваемого нами подхода от того, который представлен в [3], где подчинённость флуктуационных токов и зарядов не требовалась.

Нашей дальнейшей задачей является построение, на основе разумных предположений, случайной функции $\tilde{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{r},t)$ такой, чтобы её распределение вероятностей зависело функционально от текущего распределения температуры в среде. Во-первых, необходимо положить, чтобы среднее значение $\langle\tilde{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{r},t)\rangle$ флуктуации электрической поляризации равнялось нулю. Во-вторых, ввиду малости флуктуаций, можно ограничиться гауссовской моделью случайного поля $\tilde{P}_k(\boldsymbol{r},t)$, $k=1,2,3$. Поэтому для полной характеризации случайного поля $\tilde{P}_k(\boldsymbol{r},t)$ достаточно указать его корреляционную функцию. Причём, эта корреляционная функция должна нести в себе информацию о текущем распределении температуры $T(\boldsymbol{r},t)$. Поэтому поле $\tilde{P}_k(\boldsymbol{r},t)$ не может быть однородным. С целью конструкции этого неоднородного пространственно и нестационарного по времени гауссовского поля обратимся к его физическому смыслу.

Так как радиус корреляций флуктуаций $\tilde{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{r},t)$ имеет масштаб порядка среднего расстояния между молекулами среды, а распространение тепловых фотонов без поглощения происходит на расстояния много большие этой величины (среда полупрозрачная, то есть она обладает не очень большим поглощением электромагнитного излучения в важной для теплообмена области спектра), то можно пренебречь пространственными корреляциями флуктуаций и считать, что $\langle\tilde{P}_k(\boldsymbol{r},t)\tilde{P}_{k'}(\boldsymbol{r}',t')\rangle\sim\delta_{kk'}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$. В этом свойстве корреляционной функции мы также, посредством символа Кронекера $\delta_{kk'}$, учли стохастическую изотропию флуктуаций.

Если бы случайная раскачка электрической поляризации не была связана с излучением и поглощением фотонов, то её временну́ю корреляционную функцию можно было бы также считать δ-образной. Чтобы выявить истинный характер временны́х корреляций, возникающих вследствие пролёта фотонов, а также характер неоднородности поля $\tilde{P}_k(\boldsymbol{r},t)$ по пространству и времени, учтём, что флуктуации $\tilde{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{r},t)$ связаны с системой молекул, находящихся вблизи точки с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, излучающих и поглощающих фотоны. Тогда эту случайную функцию естественно связать с распределением фотонов, излучаемых этой системой молекул.

Фотоны с различными частотами представляют собой идеальный газ и поэтому не коррелируют друг с другом. Соответственно, частотная корреляционная функция для спектральных амплитуд

$$\bar{P}_k(\boldsymbol{r},\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{P}_k(\boldsymbol{r},t)e^{-i\omega t}dt\,, \tag{7}$$

в этом случае, должна быть пропорциональна $(2\pi)^{-1}\delta(\omega-\omega')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$. Найдём коэффициент пропорциональности при этой δ-функции, то есть спектральную плотность.

Так как физическая размерность функции $\tilde{P}_k$ равна $\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{M}/\mathrm{L})^{1/2}$ и, следовательно, размерность $\bar{P}_k$ равна $(\mathrm{M}/\mathrm{L})^{1/2}$, то размерность спектральной плотности равна T·[энергия]/[объём]. Поэтому искомую спектральную плотность естественно связать со спектральной плотностью энергии фотонов с частотой ω, находящихся в единице объёма.

Вводя $\tau W(\hbar\omega/\kappa T(\boldsymbol{r},t))$ – нормированную на единицу плотность распределения фотонов по частотам при температуре излучателей $T(\boldsymbol{r},t)$, где τ – временной множитель, численно равный среднему времени внутримолекулярных энергетических переходов, представим спектральную плотность выражением $\tau\hbar\omega W(\hbar\omega/\kappa T(\boldsymbol{r},t))$. Таким образом, можно записать

$$\langle \tilde{P}_k(\boldsymbol{r},\omega)\tilde{P}^*_{k'}(\boldsymbol{r}',\omega')\rangle = \frac{\tau}{2\pi}\hbar\omega W\left(\frac{\hbar\omega}{\kappa T(\boldsymbol{r},t)}\right)\delta_{kk'}\delta(\omega-\omega')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,. \tag{8}$$

Тогда, формально, можно положить

$$\tilde{P}_k(\boldsymbol{r},\omega) = U(T(r,t),\omega)\varphi_k(\boldsymbol{r},\omega)\,, \tag{9}$$

где $U(T,\omega) = [\tau\hbar\omega W(\hbar\omega/\kappa T)]^{1/2}$ и $\varphi_k(\boldsymbol{r},\omega)$ – "стандартная" обобщённая гауссовская случайная функция с нулевым средним значением и с корреляционной функцией

$$\langle \varphi_k(\boldsymbol{r},\omega)\varphi^*_{k'}(\boldsymbol{r}',\omega')\rangle = \frac{1}{2\pi}\delta_{kk'}\delta(\omega-\omega')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,. \tag{10}$$

В терминах этой случайной функции флуктуационные ток и заряд выражаются, согласно (7), формулами

$$\tilde{j}_k(\boldsymbol{r},t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(i\omega U(T(\boldsymbol{r},t),\omega) + \frac{\partial}{\partial t}U(T(\boldsymbol{r},t),\omega)\right)\varphi_k(\boldsymbol{r},\omega)e^{i\omega t}d\omega\,, \tag{11}$$

$$\tilde{\rho}(\boldsymbol{r},t) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(U(T(\boldsymbol{r},t),\omega)\nabla_j\varphi_j(\boldsymbol{r},\omega) + \varphi_k(\boldsymbol{r},\omega)\nabla_k U(T(\boldsymbol{r},t),\omega)\right)e^{i\omega t}d\omega\,. \tag{12}$$

3. Квазистационарное тепловое электромагнитное поле. Покажем, теперь, каким образом должна решаться основная задача теории радиационно-кондуктивного теплообмена в принятой нами стохастической модели для флуктуационного электромагнитного поля. Она состоит в вычислении среднего $\langle(\nabla,\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t))\rangle$ для произвольного распределения температуры, где плотность $\boldsymbol{S}$ потока энергии определяется формулой

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}](\boldsymbol{r},t)\,. \tag{13}$$

Таким образом, при вычислении величины $\langle(\nabla,\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t))\rangle$ должно быть произведено усреднение квадратичного выражения по случайным гауссовским полям правой части этой формулы. Поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ являются гауссовскими в силу линейности системы уравнений (5),(6), а также линейности выражений (11), (12). Это среднее вычисляется на основе явного вида линейных преобразований случайного поля $\varphi_k(\boldsymbol{r},\omega)$, применением которых к полю $\varphi_k(\boldsymbol{r},\omega)$ находятся выражения для полей $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$. Вид этих преобразований определяется функцией Грина решения начально-краевой задачи с граничными условиями на границе области, занятыми средой. Эти условия отражают непрерывность перехода полей $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ вместе со своими тангенциальными производными в область вне среды. Во внешней области эти поля являются решениями уравнений Максвелла в вакууме, асимптотически, при неограниченном удалении от области, занятой средой, они должны иметь вид расходящихся сферических волн. Начальные условия для требуемых решений полагаются равными нулю, что отражает отсутствие у них детерминированных составляющих. В результате, среднее $\langle(\nabla, \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t))\rangle$ принимает вид интегрального преобразования от среднего $\langle \tilde{P}_k(\boldsymbol{r},\omega)P^*_{k'}(\boldsymbol{r}',\omega')\rangle$. Оно нелинейным образом зависит от распределения температуры $T(\boldsymbol{r},t)$, и вид этой нелинейности определяется видом распределения $W(\cdot)$. Реализуем теперь эту процедуру усреднения явно, считая соответствующую функцию Грина известной.

Введём специальные вектор-функции $E_j(\boldsymbol{r},t,\omega)$, $H_j(\boldsymbol{r},t,\omega)$, $j=1,2,3$, зависящие от частоты ω, которые удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\nabla_k H_k(\boldsymbol{r},t,\omega) = 0\,, \qquad \varepsilon(\omega)\nabla_k E_k(\boldsymbol{r},t,\omega) = 4\pi\rho(\boldsymbol{r},t,\omega)\,, \tag{13}$$

$$\rho(\boldsymbol{r},t,\omega) = -U(T(\boldsymbol{r},t),\omega)\nabla_j\varphi_j(\boldsymbol{r},\omega) - \varphi_j(\boldsymbol{r},\omega)\nabla_j U(T(\boldsymbol{r},t),\omega)\,, \tag{14}$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}H_k(\boldsymbol{r},t,\omega) + i\frac{\omega\mu}{c}H_k(\boldsymbol{r},t,\omega) = -\epsilon_{klm}\nabla_l E_m(\boldsymbol{r},t,\omega)\,, \quad k=1,2,3\,, \tag{15}$$

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{c}\frac{\partial}{\partial t}E_k(\boldsymbol{r},t,\omega) + i\frac{\omega}{c}\varepsilon(\omega)E_k(\boldsymbol{r},t,\omega) + \frac{4\pi}{c}j_k(\boldsymbol{r},t,\omega) = \epsilon_{klm}\nabla_l H_m(\boldsymbol{r},t,\omega)\,, \quad k=1,2,3\,, \tag{16}$$

$$j_k(\boldsymbol{r},t,\omega) = \varphi_k(\boldsymbol{r},\omega)\left(i\omega U(T(\boldsymbol{r},t),\omega) + \frac{\partial}{\partial t}U(T(\boldsymbol{r},t),\omega)\right)\,, \quad k=1,2,3\,, \tag{17}$$

где символ ϵ_{klm}, $k,l,m=1,2,3$ представляет собой псевдотензор Леви-Чивита. По своему физическому смыслу введённые функции описывают квазистационарные, относительно быстрого процесса распространения электромагнитного излучения в образце, поля.

На основе решений системы (13)-(17) с нулевыми начальными условиями при $t=0$ для полей $E_j(\boldsymbol{r},t,\omega)$, $H_j(\boldsymbol{r},t,\omega)$, $j=1,2,3$, удовлетворяющих граничным условиями в виде непрерывного перехода этих полей и их тангенциальных производных на границе области в соответствующие поля вне области, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла в вакууме и имеют асимптотический вид расходящихся на бесконечности сферических волн, строятся решения исходной начально-краевой задачи. А именно, можно положить, согласно (5), (6), (11), (12),

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t,\omega)d\omega\,, \qquad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t,\omega)d\omega\,. \tag{18}$$

В терминах введённых функций плотность потока энергии выражается формулой

$$S_k(\boldsymbol{r},t) = \frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\epsilon_{klm}E_l(\boldsymbol{r},t,\omega')H^*_m(\boldsymbol{r},t,\omega'-\omega)d\omega'\right)d\omega\,. \tag{19}$$

Из уравнений (13)-(17) получаются отдельные уравнения для полей $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t,\omega)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t,\omega)$, которые, по виду, отличаются только источниками

$$\ddot{H}_k + 2i\omega\dot{H}_k - \omega^2 H_k + \frac{c^2}{n^2(\omega)}\,\Delta H_k = \frac{4\pi c}{n^2(\omega)}\,\epsilon_{klm}\nabla_l j_m\,,$$

$$\ddot{E}_k + 2i\omega\dot{E}_k - \omega^2 E_k + \frac{c^2}{n^2(\omega)}\,\Delta E_k = -\frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)}\left(i\omega j_k + \frac{\partial j_k}{\partial t} + \frac{c^2}{n^2(\omega)}\,\nabla_k\rho\right)\,,$$

где $n^2(\omega)=\mu\varepsilon(\omega)$. Пусть $G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t';\omega)$ – функция Грина начально-краевой задачи с требуемыми условиями на границе области, то есть

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + 2i\omega\frac{\partial G}{\partial t} - \omega^2 G + \frac{c^2}{n^2(\omega)}\Delta G = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')\,. \tag{20}$$

Тогда

$$H_k(\boldsymbol{r},t,\omega'-\omega) = \frac{4\pi c}{n^2(\omega'-\omega)}\,\epsilon_{klm}\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_0^t G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t';\omega'-\omega)\nabla'_l j_m(\boldsymbol{r}',t',\omega'-\omega)dt'\right)d\boldsymbol{r}'\,,$$

$$E_k(\boldsymbol{r},t,\omega') =$$

$$= -\frac{4\pi}{\varepsilon(\omega')}\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_0^t G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'',t-t'';\omega')\left(\frac{\partial j_k}{\partial t''} + i\omega' j_k + \frac{c^2}{n^2(\omega')}\nabla''_k\rho\right)(\boldsymbol{r}'',t'',\omega')dt''\right)d\boldsymbol{r}''\,,$$

где Ω – область, занятая средой.

Тогда усреднение по флуктуациям даёт

$$\langle S_j(\boldsymbol{r},t,\omega)\rangle \equiv \frac{c}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\epsilon_{klm}\langle E_l(\boldsymbol{r},t,\omega')H^*_m(\boldsymbol{r},t,\omega'-\omega)\rangle d\omega' =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{4\pi c^2\epsilon_{jkl}\epsilon_{lmn}}{n^2(\omega')\varepsilon(\omega')}\,d\omega'\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_0^t G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'',t-t'';\omega')\times\right.$$

$$\left.\times\nabla'_m\left[\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[\int\limits_0^t G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t';\omega')\langle u_k(\boldsymbol{r}'',t'',\omega')j^*_n(\boldsymbol{r}',t',\omega'-\omega)\rangle\,dt''\right]d\boldsymbol{r}''\right]dt'\right)d\boldsymbol{r}'\,, \tag{21}$$

где

$$u_k(\boldsymbol{r}'',t'',\omega') = \frac{\partial j_k}{\partial t''} + i\omega' j_k + \frac{c^2}{n^2(\omega')}\nabla''_k\rho \tag{22}$$

и учтено, что усредняемое выражение $\langle u_k\, j^*_n\rangle$ под знаком интеграла пропорционально $\delta(\omega)$. Оно, в общем случае, представляет собой довольно громоздкое выражение и содержит слагаемые различного порядка по величине. Его упрощение связано с выделением только тех главных из них, которые дают основной вклад в усреднённую дивергенцию плотности потока энергии при построении замкнутого эволюционного уравнения для распределения температуры.

Первое упрощение связано с замечанием, что в выражении для тока j_k слагаемым с производной $\partial U/\partial t$ в формуле (17) можно пренебречь по сравнению с первым слагаемым, так как распределение температуры очень медленно изменяется со временем, а множитель ω в первом слагаемом очень большой. Таким образом, мы принимаем

$$j_k(\boldsymbol{r},t,\omega) = i\omega U(T(\boldsymbol{r},t),\omega)\varphi_k(\boldsymbol{r},\omega)\,, \quad k=1,2,3\,. \tag{23}$$

По этой же причине, выбрасывается слагаемое $\partial j_k/\partial t''$ в выражении (22) для u_k. Среднее $\langle u_k\, j_n^*\rangle$ сосредоточено на гиперплоскости, где $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}''$, то есть каждое его слагаемое пропорционально δ-функции $\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}'')$ или её производным. В самом деле, на основании сказанного выше, принимая во внимание (23),

$$\langle u_k j_n^*\rangle \approx i\omega'\langle j_k(\boldsymbol{r}'',t'',\omega')j_n^*(\boldsymbol{r}',t',\omega'-\omega)\rangle + \frac{c^2}{n^2(\omega')}\nabla_k''\langle\rho(\boldsymbol{r}'',t'',\omega')j_n^*(\boldsymbol{r}',t',\omega'-\omega)\rangle =$$

$$= \delta(\omega)\frac{i\omega'}{2\pi}\left(\omega'^2U'U''\delta_{kn}\delta(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}') + \frac{c^2}{n^2(\omega')}\nabla_k''U'\left[U''\nabla_n\delta(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}') + \delta(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}')\nabla_n''U''\right]\right)\,, \tag{24}$$

где $U''=U(T(\boldsymbol{r}'',t''),\omega')$, $U'=U(T(\boldsymbol{r}',t'),\omega')$.

Так как функция Грина быстро изменяется пространственно в силу большой величины множителя перед лапласианом в уравнении (20), по сравнению с распределением температуры $T(\boldsymbol{r},t)$, то главными слагаемыми в интеграле по $\boldsymbol{r}'$ (после вычисления интеграла по $\boldsymbol{r}''$ с помощью δ-функции) будут те, которые содержат пространственные производные функции Грина наибольшего порядка. Им соответствуют слагаемые с наибольшим порядком производной от δ-функции $\delta(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}')$ в выражении (24). Поэтому, в принятом приближении, первое слагаемое в (24) должно быть отброшено. Далее, подействовав на выражение в (24), стоящее под действием оператора ∇_k'', оператором ∇_m' и свернув с символом Леви-Чивита ϵ_{lmn}, получаем

$$\epsilon_{lmn}\left(U''(\nabla_m'U')\nabla_n''\delta(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}') + U'(\nabla_n''U'')\nabla_m'\delta(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}')\right)\,.$$

Следовательно, воспользовавшись тождеством $\epsilon_{jkl}\epsilon_{lmn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}$,

$$\epsilon_{jkl}\epsilon_{lmn}\nabla_m'\langle u_k j_n^*\rangle \approx \delta(\omega)\frac{i\omega' c^2}{2\pi n^2(\omega')}\,\times$$

$$\times\,\nabla_k''\left(\left[U'\nabla_k''U'' + U''\nabla_k'U'\right]\nabla_j'\delta(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}') - \left[U'\nabla_j''U'' + U''\nabla_jU'\right]\nabla_k'\delta(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}')\right)\,.$$

Подстановка полученного выражения в формулу (19) с учётом (21), даёт нам

$$\langle S_j(\boldsymbol{r},t)\rangle = 2\tau\hbar c^4\cdot \mathrm{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega d\omega}{\varepsilon(\omega)n^4(\omega)}\,\times$$

$$\times \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^t G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t';\omega)\nabla_k S_{jk}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t';\omega)dt' \right) d\boldsymbol{r}' , \qquad (25)$$

где

$$S_{jk}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t';\omega) =$$

$$= \nabla_k \int\limits_0^t G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t'';\omega)V_j(\boldsymbol{r}',t',t'';\omega)dt'' - \nabla_j \int\limits_0^t G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t'';\omega)V_k(\boldsymbol{r}',t',t'';\omega)dt'' , \quad (26)$$

$$V_j(\boldsymbol{r}',t',t'';\omega) =$$

$$= W^{1/2}\left(\frac{\hbar\omega}{\kappa T(\boldsymbol{r}',t')}\right)\nabla'_j W^{1/2}\left(\frac{\hbar\omega}{\kappa T(\boldsymbol{r}',t'')}\right) + W^{1/2}\left(\frac{\hbar\omega}{\kappa T(\boldsymbol{r}',t'')}\right)\nabla'_j W^{1/2}\left(\frac{\hbar\omega}{\kappa T(\boldsymbol{r}',t')}\right) . \quad (27)$$

Формулы (25)-(27) решают задачу об общем выражении для средней по флуктуациям плотности потока энергии теплового электромагнитного излучения. Они выражают эту величину в терминах функции Грина G начально-краевой задачи для дифференциального уравнения (20), связанной с описанием излучающего точечного источника, и зависящей от температуры плотности распределения фотонов $W\left(\dfrac{\hbar\omega}{\kappa T}\right)$.

4. Заключение. В работе исследована теоретическая модель радиационно-кондуктивного теплообмена в полупрозрачных диэлектриках, которая была предложена на основе представления о тепловом электромагнитном излучении, порождаемом тепловыми флуктуациями электрической поляризации. Хотя полученное выражение представляется ещё довольно сложным, однако, оно сводит задачу вычисления усреднённой плотности потока энергии теплового электромагнитного поля к вычислению функции Грина стандартной начальной краевой задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами. Заметим, что при получении формул (25)-(27) не использовались представления геометрической оптики, то есть приближение эйконала в электродинамике. Поэтому полученное выражение пригодно в очень широком диапазоне изменения физических параметров, входящих в формулировку задачи.

Литература

1. Спэрроу Э.М., Сесс Р.Д. Теплообмен излучением / Э.М. Спэрроу. – Л.: Энергия. Ленинградское отделение, 1972. – 295 с.

2. Рытов С.М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. / М.: Изд. АН СССР, 1953.

3. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику, т.2, Случайные поля / С.М. Рытов, Ю.А. Кляцкин, В.И. Татарский. – М.: Наука, 1978. – 464 с.

4. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Флуктуационный подход в теории радиационно-кондуктивного теплообмена // Доповiдi НАНУ. – 2010. – 12. – С.63-69.

5. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Одномерная задача радиационно-кондуктивного теплообмена. Флуктуационный подход // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика, Математика. – 2009. - 5(60);16. – С.47-67.

NONEQUILIBRIUM THERMODYNAMICS OF HEAT RADIATION CONDUCTION IN DIELECTRIC MEDIA

Yu.P. Virchenko, M.A. Saprykin

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. In framework of representation of fluctuation electromagnetic field, it is built the stochastic model which describes nonequilibrium thermodynamics of heat radiation conduction in paramagnetic dielectric media. For its construction it is used stochastic field of spatially distributed thermodynamic fluctuations of electrical polarization. Its stochastic dynamics is such that the fluctuation-dissipation theorem is fulfilled.

Key words: thermal fluctuations, electrical polarization, heat radiation conduction, gaussian field.